

2022年普通高等学校招生全国统一考试

上海 数学试卷 2022.07.07

考生注意：

1. 本试卷共 5 页，21 道试题，满分 150 分。考试时间 120 分钟。
2. 本考试分设试卷和答题纸。试卷包括试题与答题要求。作答必须涂（选择题）或写（非选择题）在答题纸上，在试卷上作答一律不得分。
3. 答卷前，务必用钢笔或圆珠笔在答题纸正面清楚地填写姓名、准考证号，并将核对后的条形码贴在指定位置上，在答题纸反面清楚地填写姓名。

一、填空题（本大题共有 12 题，满分 54 分，第 1~6 题每题 4 分，第 7~12 题每题 5 分）
考生应在答题纸的相应位置填写结果。

1. 已知 $z = 1 + i$ (其中 i 为虚数单位)，则 $2\bar{z} =$ _____；

2. 双曲线 $\frac{x^2}{9} - y^2 = 1$ 的实轴长为 _____；

3. 函数 $f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x + 1$ 的周期为 _____；

4. 已知 $a \in R$ ，行列式 $\begin{vmatrix} a & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$ 的值与行列式 $\begin{vmatrix} a & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$ 的值相等，则 $a =$ _____；

5. 已知圆柱的高为 4，底面积为 9π ，则圆柱的侧面积为 _____；

6. $x + y \leq 0, x - y - 1 \leq 0$ ，求 $z = x + 2y$ 的最小值 _____；

7. 二项式 $(3 + x)^n$ 的展开式中， x^2 项的系数是常数项的 5 倍，则 $n =$ _____；

8. 若函数 $f(x) = \begin{cases} a^2x - 1 & x < 0 \\ x + a & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ ，为奇函数，求参数 a 的值为 _____

9. 为了检测学生的身体素质指标，从游泳类 1 项，球类 3 项，田径类 4 项共 8 项项目中随机抽取 4 项进行检测，则每一类都被抽到的概率为 _____；

10. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差非零， S_n 为其前 n 项和，若 $S_5 = 0$ ，则 $S_i (i = 0, 1, 2, \dots, 100)$ 中不同的数值有 _____ 个。

11. 若 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = \lambda$ ，且满足 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ ， $\vec{a} \cdot \vec{c} = 2$ ， $\vec{b} \cdot \vec{c} = 1$ ，则 $\lambda =$ _____。

12. 设函数 $f(x)$ 满足 $f(x) = f\left(\frac{1}{x+1}\right)$, 定义域为 $D = [0, +\infty)$, 值域为 A , 若集合

$\{y \mid y = f(x), x \in [0, a]\}$ 可取得 A 中所有值, 则参数 a 的取值范围为_____.

二、选择题 (本题共有 4 题, 满分 20 分, 每题 5 分) 每题有且只有一个正确选项, 考生应在答题纸的相应位置, 将代表正确选项的小方格涂黑.

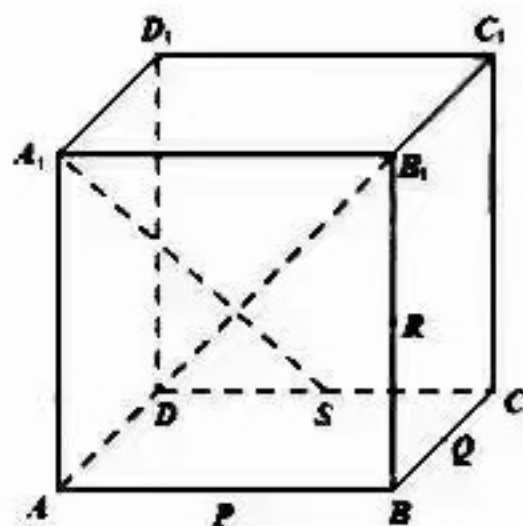
13. 若集合 $A = [-1, 2), B = \mathbb{Z}$, 则 $A \cap B = (\quad)$.

- A. $\{-2, -1, 0, 1\}$ B. $\{-1, 0, 1\}$ C. $\{-1, 0\}$ D. $\{-1\}$

14. 若实数 a, b 满足 $a > b > 0$, 下列不等式中恒成立的是 ()

- A. $a + b > 2\sqrt{ab}$ B. $a + b < 2\sqrt{ab}$ C. $\frac{a}{2} + 2b > 2\sqrt{ab}$ D. $\frac{a}{2} + 2b < 2\sqrt{ab}$

15. 如图正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, P, Q, R, S 分别为棱 AB, BC, BB_1, CD 的中点, 联结 A_1S, B_1D . 空间任意两点 M, N , 若线段 MN 上不存在点在线段 ASS, B, D 上, 则称 MN 两点可视, 则下列选项中与点 D 可视的为 ()



- A. 点 P B. 点 B C. 点 R D. 点 Q

16. 设集合 $\Omega = \left\{ (x, y) \mid (x - k)^2 + (y - k^2)^2 = 4|k|, k \in \mathbb{Z} \right\}$

①存在直线 l , 使得集合 Ω 中不存在点在 l 上, 而存在点在 l 两侧;

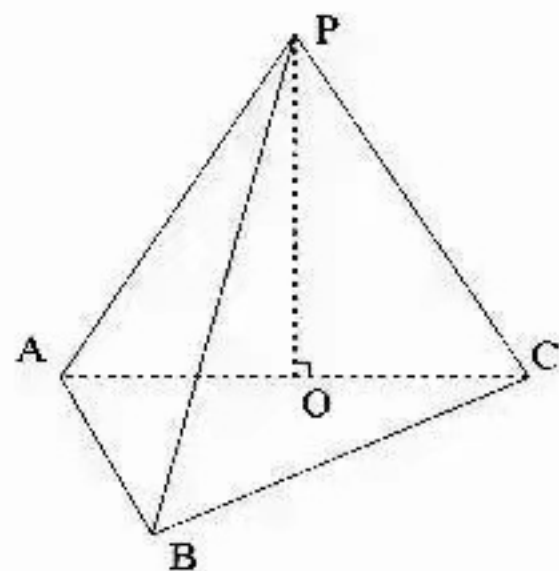
②存在直线 l , 使得集合 Ω 中存在无数点在 l 上;

- A. ①成立②成立 B. ①成立②不成立
C. ①不成立②成立 D. ①不成立②不成立

三、解答题（本大题共有 5 题，满分 76 分）解答下列各题必须在答题纸的相应位置写出必要的步骤.

17.（本题满分 14 分）本题共有 2 个小题，第 1 小题满分 6 分，第 2 小题满分 8 分.

如图所示三棱锥，底面为等边 $\triangle ABC$ ， O 为 AC 边中点，且 $PO \perp$ 底面 ABC ， $AP = AC = 2$



- (1) 求三棱锥体积 V_{P-ABC} ；
- (2) 若 M 为 BC 中点，求 PM 与面 PAC 所成角大小.

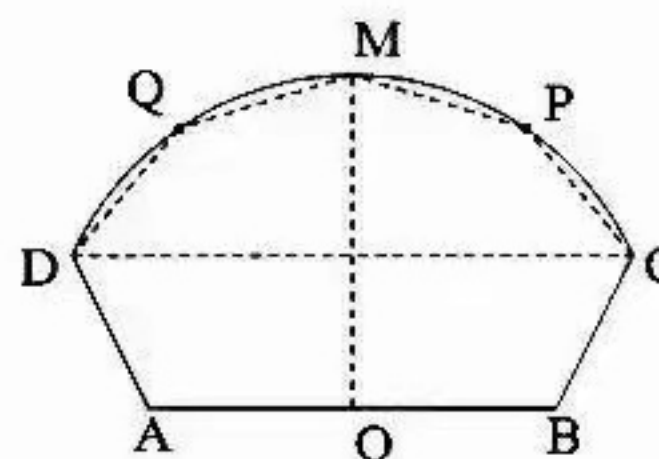
18.（本题满分 14 分）本题共有 2 个小题，第 1 小题满分 6 分，第 2 小题满分 8 分.

$$f(x) = \log_3(a+x) + \log_3(6-x)$$

- (1) 若将函数 $f(x)$ 图像向下移 $m(m > 0)$ 后，图像经过 $(3, 0)$ ， $(5, 0)$ ，求实数 a ， m 的值.
- (2) 若 $a > -3$ 且 $a \neq 0$ ，求解不等式 $f(x) \leq f(6-x)$.

19. (本题满分 14 分) 本题共有 2 个小题, 第 1 小题满分 6 分, 第 2 小题满分 8 分.

在如图所示的五边形中, $AD = BC = 6$, $AB = 20$, O 为 AB 中点, 曲线 CD 上任一点到 O 距离相等, 角 $\angle DAB = \angle ABC = 120^\circ$, P, Q 关于 OM 对称;

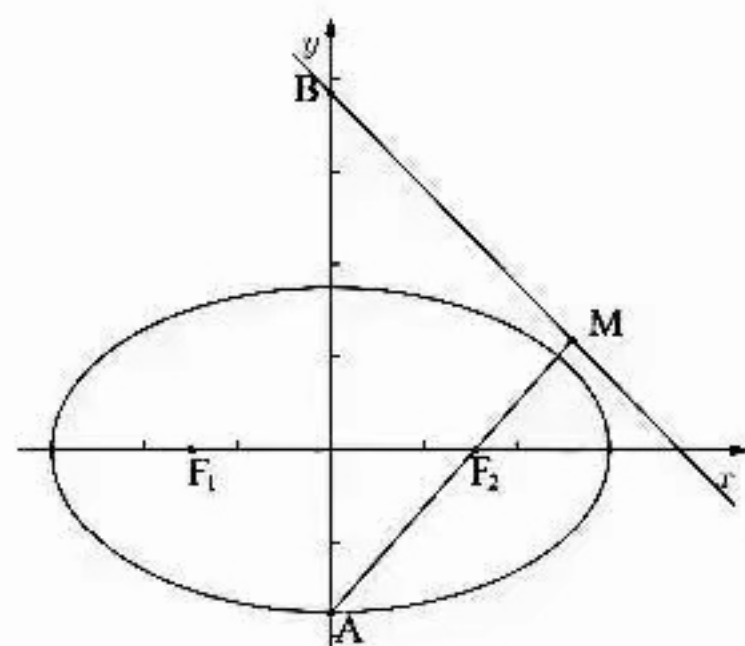


- (1) 若点 P 与点 C 重合, 求 $\angle POB$ 的大小;
- (2) P 在何位置, 求五边形面积 S 的最大值.

20. (本题满分 16 分) 本题共有 3 个小题, 第 1 小题满分 4 分, 第 2 小题满分 6 分, 第 3 小题满分 6 分.

设有椭圆方程 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 直线

$l: x + y - 4\sqrt{2} = 0$, Γ 下端点为 A , M 在 l 上, 左右焦点分别为 $F_1(-\sqrt{2}, 0)$, $F_2(\sqrt{2}, 0)$



- (1) $a = 2$, AM 中点在 x 轴上, 求点 M 的坐标;
- (2) 直线 l 与 y 轴交于 B , 直线 AM 经过右焦点 F_2 , 在 $\triangle ABM$ 中有一内角余弦值为 $\frac{3}{5}$, 求 b ;

(3) 在椭圆 Γ 上存在一点 P 到 l 距离为 d , 存在 Γ 使 $|PF_1| + |PF_2| + d = 6$, 随 a 的变化, 求 d 的最小值.

21. (本题满分 18 分) 本题共有 3 个小题, 第 1 小题满分 4 分, 第 2 小题满分 6 分, 第 3 小题满分 8 分.

数列 $\{a_n\}$ 对任意 $n \in \mathbf{N}^*$ 且 $n \geq 2$, 均存在正整数 $i \in [1, n-1]$,

满足 $a_{n+1} = 2a_n - a_i$, $a_1 = 1$, $a_2 = 3$.

- (1) 求 a_4 可能值;
- (2) 命题 p : 若 $a_1, a_2, \dots, a_8$ 成等差数列, 则 $a_9 < 30$, 证明 p 为真, 同时写出 p 逆命题 q , 并判断命题 q 是真是假, 说明理由;
- (3) 若 $a_{2^m} = 3^m, (m \in \mathbf{N}^*)$ 成立, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

